

2020年度 神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：電気電子工学専攻)

注意事項

- (1) 第1問～第3問は問題用紙の表面に、第4問は問題用紙の裏面にあります。
- (2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (3) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (4) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) n を自然数とし, 関数 $f_n(x, y) = (a_n + b_n e^{-n^2 x}) \cos ny$ を考える.

(1-a) $f_n(x, y)$ が $\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x, y) + \sqrt{n} \cos ny, x > 0, 0 < y < \pi$ および

$f_n(0, y) = 0, 0 < y < \pi$ を満たすように係数 a_n, b_n を定めよ.

(1-b) $D = \{(x, y) : x > 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ とし, (1-a) の a_n, b_n をもつ関数 $f_n(x, y)$ を考える. 任意に固定された $(x, y) \in D$ に対して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ を求めよ.

(2) a, b を相異なる実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ を考える.

(2-a) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2-b) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

2. $f(z) = 2z^3 - 5z^2 + 6z - 2$ とし, $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ とおく.

(1) $f(1+i) = 0$ であることを確認して, $f(z) = 0$ の根をすべて求めよ.

(2) $g(z)$ の各極における留数をそれぞれ求めよ.

(3) 原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 1 の円を C とする. このとき, 複素積分 $\int_C g(z) dz$ の値を求めよ.

3. $D = \{(x, y) : x > 0, y > 1\}$ 上の関数 $F(x, y) = 2xy^2 \log y, G(x, y) = x^2 y$ を考える.

(1) D において

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\lambda(y)G(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial y} \{\lambda(y)F(x, y)\}$$

を満たす恒等的には 0 でない関数 $\lambda(y), y > 1$ を 1 つ求めよ.

(2) つぎの全微分方程式を考える.

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0 \quad (*)$$

(1) の結果を用いて, D において点 $(1, e)$ を通る $(*)$ の解を求めよ.

(裏面へ続く)

4. $0 < p < \pi$ とし, 関数 $f(x) = \begin{cases} 1, & -p \leq x \leq p, \\ 0, & -\pi \leq x < -p, p < x \leq \pi \end{cases}$ を考える.

- (1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を, 記号を変えずに $f(x)$ で表わす. $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき, 各係数 a_0, a_n, b_n の値を計算せよ.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- (2) (1) の結果とパーセバルの等式を利用して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 np}{n^2}$ および $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ.