2020年度神戸大学大学院工学研究科博士課程前期課程入学試験

量子物理学

以下の問題について, それぞれ指定された答案用紙に解答しなさい. 答案用紙の裏面も使用してよいが, 指定された問題以外の解答を書かないこと. 解答には, 導出過程も記すこと.

問題1. 質量 m の電子が, 原点からの距離に比例する力 $F_x = -m\omega^2 x$ を受けて運動する一次元調和振動子について考える. ここで, ω は運動の角振動数である. 次の問1)〜5) に答えなさい. 必要であれば, 次の積分公式を使っても良い.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (\text{ただし } a > 0)$$

1) ディラック定数を $\hbar$, 電子のエネルギーを ε_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 波動関数を $\psi_n(x)$ として, この電子に対する時間に依存しないシュレーディンガー方程式を示しなさい.

2) 問1) のシュレーディンガー方程式の基底状態 $(n = 0)$ に対する解は, A_0 を規格化定数として

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right), \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$$

である. 規格化定数 A_0 と基底状態のエネルギー ε_0 を, m, ω, $\hbar$ のなかから必要なものを用いて示しなさい.

3) 基底状態における電子の位置の期待値 $\langle x \rangle$, 位置の二乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$, 運動量の期待値 $\langle p_x \rangle$, 運動量の二乗の期待値 $\langle p_x^2 \rangle$ を求めなさい.

4) 基底状態における電子の位置の不確かさ $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ と運動量の不確かさ $\Delta p_x = \sqrt{\langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle}$ の積が, $\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar/2$ となることを示しなさい.

5) 問4) の Δx と Δp_x の積の関係は, この調和振動子の基底状態以外の場合も含めて一般化すると, $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$ と書かれる. この不等式がもつ物理的意味を, 簡潔に説明しなさい.

(2枚目に続く)

問題 2. 一次元空間のポテンシャル $V(x)$ が図 1 のように表される場合において, 質量 m の電子を領域 I から領域 II に向けて入射する. 次の問 1)〜5) に答えなさい.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0 \quad \text{領域 I}) \\ -V_0 & (x > 0 \quad \text{領域 II}) \end{cases}$$

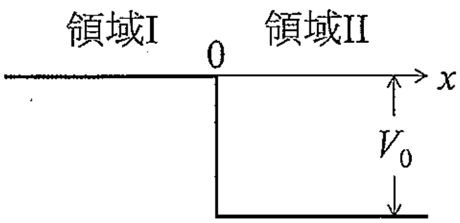

図 1: 段差のあるポテンシャル.

1) 領域 I での波動関数を $\psi_{\mathrm{I}}(x)$, 領域 II での波動関数を $\psi_{\mathrm{II}}(x)$ と表すとき, $x = 0$ における波動関数の接続条件を答えなさい.

2) 入射電子のエネルギーが ε の場合, 領域 I における入射波の波数ベクトル a と領域 II における透過波の波数ベクトル b を, ディラック定数 $\hbar$, m, V_0, ε のなかから必要なものを用いて示しなさい.

3) 入射電子の反射率を, a, b を用いて示しなさい.

4) ε=0.4 [eV], V_0=6.0 [eV] の場合, 入射電子の反射率を計算しなさい.

5) 問 4) の結果から, この電子の反射が古典力学に従う粒子の反射と異なる点を簡潔に述べなさい.