2021年度 神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
(数学:電気電子工学専攻)

注意事項

(1) 問題1～問題3は問題用紙の表面に，問題4は問題用紙の裏面にあります．

(2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題1は，左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません．

(3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい．ただし，表と上下を逆にしてください．

(4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を考える．

(1-a) 2 以上の自然数 n に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

(1-b) 任意の自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(2) ある自然数 m について $A^m = O$ を満たす正方行列 A を冪零行列という．ただし O は零行列である．

(2-a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は冪零行列であることを示せ．

(2-b) 任意の冪零行列の固有値は 0 のみであることを示せ．

2. 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{(z-1)^2}$ を考える．$R > 1$ とする．複素平面上の $-Ri$ を始点とし，原点を中心とする半径 R の円周を反時計方向に進んで終点 Ri に至る半円弧を C_1 とする．また始点 Ri から終点 $-Ri$ に至る線分を C_2 とする．単純閉曲線 C を $C = C_1 \cup C_2$ とおく．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = 0$ となることを示せ．

(3) (1) と (2) の結果を用いて積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2t\sin 2t - (t^2-1)\cos 2t}{(t^2+1)^2}\,dt$ の値を求めよ．

3. $y = y(x)$, $x \geq 0$ に関するつぎの非同次微分方程式

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-2x} \qquad (*)$$

を考える．

(1) 同次微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) 初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ のもとで $(*)$ の解 $y(x)$ を求め，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x y(x)$ が存在する場合にはその値を求めよ．

（裏面へ続く）

4. n を自然数とし，関数 $f(x) = \begin{cases} n(1-n|x|), & |x| \leq 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n \end{cases}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を，記号を変えずに $f(x)$ で表わす．$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき，各係数 a_0, a_k, b_k の値を計算せよ．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(2) (1) で得た係数 a_k を $a_k(n)$ と表わす．任意に固定された k に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ を求めよ．

(3) (1) の結果を利用して，級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(1 - \cos\frac{k}{n}\right)$ の値を求めよ．