2021 年度神戸大学大学院工学研究科博士課程前期課程入学試験

量子物理学

下記の問 1)～11) について解答せよ．解答は，結果だけでなく導出の過程も記す事．

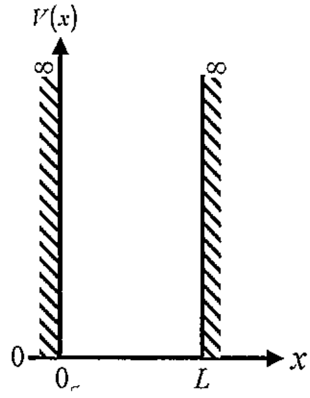

図 1

問題．　電子が図 1 に示すような一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le L\\ \infty & x<0,\quad x>L\end{cases} \quad \text{-------} \ (1)$$

に閉じ込められているとする．次の問いに答えなさい．

1) ポテンシャル $V(x)$ 中の電子に対する時間に依存しない一次元シュレーディンガー方程式を，ポテンシャル $V(x)$，ディラック定数 $\hbar$ ($=h/2\pi$, h はプランク定数)，電子の質量 m，波動関数 $\varphi(x)$，電子の位置座標 x，電子のエネルギー E などを用いて書きなさい（結果だけで良い）．

2) プランク定数の単位を書きなさい．ただし，ジュール[J]，キログラム[kg]，メートル[m]，秒[s]のどれを用いても良い．また，その根拠となる考えを文章で書きなさい．

3) 問 1) で書いたシュレーディンガー方程式に，式(1) で与えられるポテンシャル形状を適用し，エネルギー固有値（エネルギー準位）E_n を求めなさい．ただし，量子数 n が 1（$n=1$）の時に基底状態を表すものとする．

4) 問 3) で得られたエネルギー固有値 E_n に属する波動関数 $\varphi_n(x)$ が，規格化定数を含めて，$\varphi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ になる事を示しなさい．また，波動関数の規格化がなぜ必要であるか文章で答えなさい．更に，異なるエネルギー固有値 E_n に属する波動関数 $\varphi_n(x)$ が互いに直交する事を示しなさい．

次に，電子が　$\psi(x)=\sqrt{1-P}\,\varphi_1(x)+\sqrt{P}\,\varphi_2(x)$　--------------- (2)

という重ね合わせの状態にあるとして，次の問いに答えなさい．($\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ はそれぞれ，上で述べた波動関数 $\varphi_n(x)$ の $n=1$，$n=2$ に対応．P は $0\le P\le 1$ を満たす任意の実数とする．)

5) この波動関数 $\psi(x)$ が規格化されている事を示しなさい．

6) この状態 $\psi(x)$ におけるエネルギーの期待値 $\langle E\rangle$，エネルギーの二乗の期待値 $\langle E^2\rangle$，及びエネルギーの標準偏差 σ_E を求めなさい．ただし，エネルギーの標準偏差が $\sigma_E=\sqrt{\left\langle\left(E-\langle E\rangle\right)^2\right\rangle}$ と書ける事を用いてよい．ここで $\langle A\rangle$ は物理量 A の期待値を意味する．

（２枚目に続く）

7) 横軸を式(2)の P，縦軸をエネルギーの期待値 $\langle E\rangle$，及びエネルギーの標準偏差 σ_E とするグラフの概略をそれぞれ図示しなさい．

8) エネルギーの標準偏差 σ_E がエネルギーの不確定さを意味する事を踏まえ，これが，基底準位と第一励起準位の間のエネルギー差 E_2-E_1 に対する割合としてどの程度大きくなりうるかについて考察しなさい．

次に，式(1)で与えられていた無限大井戸型ポテンシャル $V(x)$ に加え，次の矩形型の摂動ポテンシャル $V'(x)$ が存在しているとする．

$$V'(x)=\begin{cases} V_0 & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & x < x_1,\ x > x_2 \end{cases} \qquad \text{-------} \quad (3)$$

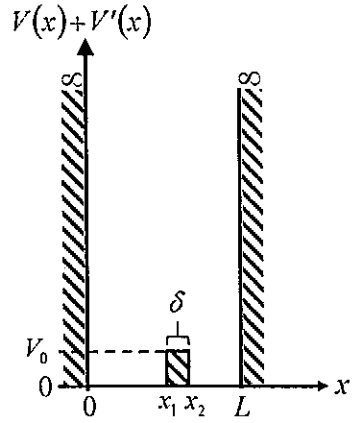

図 2

ここで $V_0>0$，矩形型ポテンシャルの幅は $\delta \equiv x_2-x_1$ とする．この時，電子が実際に感じるポテンシャル $V(x)+V'(x)$ の概形は図２のようになっている．これを踏まえて次の問いに答えなさい． ただし，以下では δ が十分小さく，計算の過程で現れる任意の被積分関数 $f(x)$ は常に幅 δ に渡って一定と見なせるとし， $\int_{x_1}^{x_1+\delta} f(x)dx \simeq f(x_1)\delta$ という近似を用いてよい．

9) 問 3) で求めた無限大井戸型ポテンシャル $V(x)$ 中の電子のエネルギー準位 E_n が，今， $V'(x)$ が付け加わった事によって $E_n+\Delta E_n$ に変化したとする．このエネルギー準位の変化 ΔE_n を，一次の摂動論の式 $\Delta E_n=\int_0^L \varphi_n^*(x)V'(x)\varphi_n(x)dx$ を用いて求めなさい．

10) 問 9)の結果を踏まえ，横軸を x_1，縦軸を ΔE_n とするグラフの概略を $n=1$ と $n=2$ の場合に対して図示しなさい．ただし，解答で図示するグラフにおいては幅 δ が有限である事は考慮しなくて良い．更に， $n=1$ と $n=2$ それぞれの場合について， x_1 がどこにある場合に ΔE_n が最も大きくなるかを答え，また，なぜ x_1 がその位置にある場合に ΔE_n が最も大きくなるかについての物理的説明を文章で書きなさい．

11) 問 6) で求めた，式(2)で与えられる状態 $\psi(x)$ におけるエネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ は，摂動ポテンシャル $V'(x)$ が付け加わった事によって $\Delta E_\psi=\int_0^L \psi^*(x)V'(x)\psi(x)dx$ だけ変化する．これを用いて ΔE_ψ を求めなさい．

以上．