2022年度　神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程　入学試験問題
（数学：電気電子工学専攻）

注意事項

(1) 問題１〜問題３は問題用紙の表面に，問題４は問題用紙の裏面にあります．

(2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題１は，左上端に１と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません．

(3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい．ただし，表と上下を逆にしてください．

(4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3 + 4$ を考える．

(1-a) 偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(1-b) $f(x,y) = 0$ によって y を x の陰関数として定めるとき，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ を満たす点 (x,y) を求めよ．

(2) a を実定数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を考える．

(2-a) 行列 A の固有値を求めよ．

(2-b) 行列 A が対角化可能となる a の値をすべて求めよ．

2. 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^z(z+2)}{(z-1)^2}$ を考える．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心とするローラン展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$ の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-1)^n$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{f(z)}$ の $z=-2$ を中心とするローラン展開 $\dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z+2)^n$ の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z+2)^n$ を求めよ．

(3) 原点を中心とする半径 3 の円周を反時計回りに一周する積分路を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C \left(f(z)dz + \frac{1}{f(z)} \right) dz$ の値を求めよ．

3. 未知関数 $x(t)$ の $\pi - t$ における値 $x(\pi - t)$ と, t における微分係数 $x'(t)$ の間につぎの関係が成立しているとする．

$$x'(t) + x(\pi - t) = 0, \quad -\infty < t < \infty \qquad (*)$$

(1) $y(t) = x(\pi - t)$ とおくとき, 線形微分方程式系 $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) (1) で得られた微分方程式系の一般解を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて, $(*)$ を満たす $x(t)$ を任意定数を一つ含む形で求めよ．

（裏面へ続く）

4. 関数 $f(x) = e^{-|x|}\sin x$ と $g(x) = e^{-|x|}\cos x$ を考える.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$ の値は有限であることを示せ.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx, \quad \hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}dx, \quad -\infty < t < \infty$$

とする. $\hat{g}(t) + i\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t) - i\hat{f}(t)$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて, $\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t)$ を求めよ.