量子物理学

問題 1. ディラック定数を $\hbar(=h/2\pi, h$ はプランク定数), 電子の質量を m とし, 下記の問 1)〜問 6) に答えなさい. 問 2), 問 3) は解のみで良い.

1) 不確定性関係について, 100 字程度の文章で簡潔に説明しなさい.

2) 次のような一次元空間の井戸型ポテンシャル内に電子が閉じ込められている.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (|x| > a/2) \\ 0 & (|x| \leq a/2) \end{cases}$$

この電子の基底状態のエネルギーと規格化された波動関数を答えなさい.

3) k を波数, ω を角振動数, t を時間, x を一次元空間の座標として, 電子の運動を表す一次元平面波 $e^{i(kx-\omega t)}$ の群速度と位相速度を, $\hbar$, m, k のなかから必要なものを用いて答えなさい.

4) エルミート演算子 A の異なる固有値に属する固有関数が直交することを証明しなさい.

5) x 方向の運動量を表す演算子 p_x を, 微分演算子を用いて表しなさい. また, p_x がエルミート演算子であることを証明しなさい.

6) 一次元空間の束縛状態のエネルギー固有値は縮退がないことを証明しなさい.

(2 枚目に続く)

問題 2. 質量 m の電子が, 原点からの距離に比例する力 $F_x = -m\omega^2 x$ を受けて運動する一次元調和振動子について考える. ここで, ω は運動の角振動数である. ディラック定数を $\hbar$ として, 次の問 1)〜問 4) に答えなさい. 問 2)〜問 4) の解答には, 導出過程も記すこと. 必要であれば, 次の積分公式を使っても良い.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (\text{ただし } a > 0)$$

1) 電子のエネルギーを ε_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 波動関数を $\psi_n(x)$ として, この電子に対する時間に依存しないシュレーディンガー方程式を答えなさい.

2) 問 1) のシュレーディンガー方程式の基底状態 $(n = 0)$ に対する解は, A_0 を規格化定数として

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right), \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$$

である. 規格化定数 A_0 と基底状態のエネルギー ε_0 を, m, ω, $\hbar$ のなかから必要なものを用いて答えなさい.

3) 問 1) のシュレーディンガー方程式の第一励起状態 $(n = 1)$ に対する解は,

$$\psi_1(x) = \left(2\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}}\right)^{1/2} x \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right), \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$$

である. C_0 と C_1 を $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$ を満たす複素数として, 基底状態 $\psi_0(x)$ と第一励起状態 $\psi_1(x)$ の重ね合わせの状態

$$\Psi(x) = C_0\psi_0(x) + C_1\psi_1(x)$$

に対する位置の期待値 $\langle x \rangle$ と運動量の期待値 $\langle p_x \rangle$ を, m, ω, $\hbar$, C_0, C_1 のなかから必要なものを用いて答えなさい.

4) 問 1) のシュレーディンガー方程式の電子が感じるポテンシャル項に, λx^2(λ は実数) の摂動ポテンシャルを加えた. 基底状態 $(n = 0)$ の λ に関する一次の摂動エネルギーを, 摂動論を用いて答えなさい.