

2023 年度 神戸大学大学院工学研究科
博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：電気電子工学専攻)

注意事項

- (1) 問題 1 ～問題 3 は問題用紙の表面に，問題 4 は問題用紙の裏面にあります。
- (2) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題 1 は，左上端に 1 と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合，採点の対象となりません。
- (3) 解答欄が不足した場合は，裏面に書いてよろしい。ただし，表と上下を逆にしてください。
- (4) 受験番号と科目名の裏の部分には，何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y) = e^{x+y}$ に対して, 平均値定理

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf_y(x+\theta h, y+\theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

が成り立つことが知られている. 上式を満たす θ を, h と k を用いて表わせ. ただし, $h+k \neq 0$ とする. さらに, $h+k \neq 0$ を保った状態で $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ としたときの θ の極限, すなわち $\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ h+k \neq 0}} \theta$ を求めよ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ と $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を考える.

(2-a) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおく. $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AY = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル X, Y を求めよ.

(2-b) (2-a) の結果を用いて, 行列 B を求めよ.

2. n を自然数とする. 複素関数 $f_n(z) = (z-1)(z-2)\cdots(z-n)$ に対して, 複素積分 $\int_{C_n} \frac{zf'_n(z) - nf_n(z)}{zf_n(z)} dz$ を n の関数として $\Phi(n)$ と表わす. ただし, C_n は原点を中心として反時計方向に引き付けられた半径 $n+1$ の円とする.

(1) $\Phi(1)$ と $\Phi(2)$ の値を求めよ.

(2) 3 以上の自然数 n に対して, $\Phi(n)$ の値を求めよ.

3. $y = y(x)$, $x > 0$ に関するつぎの微分方程式

$$xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0 \quad (*)$$

を考える.

(1) $y = e^x$ が方程式 (*) の解の一つであることを示せ.

(2) $u = ye^{-x}$ とおき, u に関する微分方程式を導け. さらにこの微分方程式を解き, 方程式 (*) の一般解を求めよ.

(3) 方程式 (*) の一組の基本解を求め, そのロンスキアン $W(x)$ を計算せよ.

(裏面へ続く)

4. n を 2 以上の自然数とし、関数

$$f(x) = \begin{cases} [|x|], & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

を考える。ただし、 $[a]$ は a 以下の最大整数を表わす。

(1) $f(x)$ のグラフを描け。

(2) $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$, $-\infty < t < \infty$ を求めよ。

(3) $1 < L < 2$ とする。(2) の結果を利用して、等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nt) \cos(Lt)}{t} dt = \frac{\pi}{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kt) \cos(Lt)}{t} dt$$

が成り立つことを示せ。