

# 量子物理学

下記の問 1)～10) について解答せよ。解答は、結果だけでなく導出の過程も記す事。  
必要なら以下の積分公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

(ただし  $a > 0$ )

問題. 質量  $m$  の電子が, 原点からの距離  $x$  に比例する力  $F = -kx$  を受けて運動する一次元調和振動子について考える。

- 1) 問題文中の力  $F$  を受けて運動する電子のポテンシャルエネルギーが

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \text{ ----- (1)}$$

と書ける事を説明しなさい。

- 2) 振動の角振動数  $\omega$  を  $m$  と  $k$  を用いて表しなさい。(結果のみで良い)
- 3) 前問 2) の結果を踏まえ, 式(1) のポテンシャル中の電子に対する時間に依存しないシュレディンガー方程式を, 角振動数  $\omega$ , ディラック定数  $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数), 波動関数  $\varphi(x)$ , 電子のエネルギー  $\varepsilon$  を含む式で書きなさい (結果のみで良い)。
- 4) 前問 3) で得られたシュレディンガー方程式を踏まえて, 基底状態のエネルギー準位  $\varepsilon_0$ , 第一励起状態のエネルギー準位  $\varepsilon_1$  を求め,  $\omega$  を含む式で答えなさい。ただし, 基底状態, 第一励起状態の規格化された波動関数がそれぞれ  $\varphi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2}$ ,  $\varphi_1(x) = A_0 b x e^{-\alpha x^2} = b x \varphi_0(x)$  という形に書ける事を用いてよい ( $\alpha$ ,  $A_0$ ,  $b$  は  $x$  に依存しない定数)。
- 5) 波動関数の規格化条件から, 前問 4) における定数  $A_0$ ,  $b$  を表す式を求めなさい。
- 6) 基底状態, 第一励起状態における電子の位置の期待値  $\langle x \rangle$  と位置の 2 乗の期待値  $\langle x^2 \rangle$ , 位置の標準偏差  $\sigma = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$  を求めなさい。
- 7) 前問 6) で得られた基底状態と第一励起状態の標準偏差のどちらが大きいかを答え, なぜそのような大小関係になるかを, それぞれの波動関数を図示する事によって文章で答えなさい。

(2 枚目に続く)

次に、この調和振動子ポテンシャル中の電子に対し  $x$  方向の電界  $E$  が印加された場合を考える。

- 8) 電子の電荷を  $-e$  (ただし  $e > 0$ ) としたとき、この電界による影響を含んだポテンシャルエネルギーは

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + eEx \text{ ----- (2)}$$

によって与えられる。ここで、電界による影響が式(2)の第2項のように書ける事を説明しなさい。

- 9) 式(2)のポテンシャルは

$$V(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2 + V_0 \text{ ----- (3)}$$

という形に書き換える事が可能である(ただし  $x_0$ ,  $V_0$  は  $x$  に依存しない定数)。このとき、 $x_0$ ,  $V_0$  を求め、角振動数  $\omega$  を含む式で答えなさい。更に、この(3)のポテンシャルの概略図を、横軸を  $x$ , 縦軸をポテンシャル  $V(x)$  として図示しなさい。ここで、符号の異なる二つの電界に対してのポテンシャルを図示する事。また、図中には  $x_0$  の位置、及び  $x_0$  におけるポテンシャルの式も書き入れること。

- 10) 前問 4), 6), 9) の結果を踏まえ、式(3)のポテンシャル中での基底状態、第一励起状態におけるエネルギー準位、電子の位置の期待値  $\langle x \rangle$  を答えなさい。(結果のみでよい。ただし結果に至る論理を文章で説明すること)。