

情報理論

以下の問いについて、それぞれ指定された答案用紙に解答しなさい。なお、情報量の単位は bit とする。

問題 1. 情報源記号の集合 A 上に値を取る二つの確率分布 $p = \{p(x)\}, q = \{q(x)\}$ について定義される量

$$D(p||q) = \sum_{x \in A} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\text{a})$$

の性質として

$$D(p||q) \geq 0 \quad (\text{b})$$

がある。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 式(b)が成り立つことは以下のように示される。

自然対数の底を e としたとき、次の式

$$\log x \leq (x-1) \log e \quad (x > 0)$$

が任意の正の数を底とする対数に対して成立することから、

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} &\leq \sum_{x \in A} \boxed{\text{(A)}} \log e \\ &= \sum_{x \in A} (q(x) - p(x)) \log e = \boxed{\text{(B)}}. \end{aligned}$$

式(a)より、

$$D(p||q) = \sum_{x \in A} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} = - \sum_{x \in A} p(x) \boxed{\text{(C)}} \geq 0.$$

となる。空欄 (A) ~ (C) を埋めなさい。

(2) 集合 A の大きさを α とし、その確率変数 X のエントロピー $H(X)$ は、

$$H(X) \leq \log \alpha \quad (\text{c})$$

を満たす。このことは以下のように示される。

すべての x について $q(x) = \boxed{\text{(D)}}$ である一様分布 q を考える。 X が従う分布を p とすると、式(a)より

$$\begin{aligned} D(p||q) &= \sum_{x \in A} p(x) \log \boxed{\text{(E)}} p(x) \\ &= \sum_{x \in A} \boxed{\text{(F)}} + \sum_{x \in A} p(x) \log p(x) \\ &= \log \alpha - H(X) \geq 0 \end{aligned}$$

よって、式(c)が成り立つ。空欄 (D) ~ (F) を埋めなさい。

問題 2. メッセージ $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n-1})$ に対して 1 個の記号のみを付加する情報記号数 $k = n - 1$ の 2 元単一パリティ検査符号 C に関する以下の問いに答えなさい.

- (1) 反転確率が p である 2 元対称通信路において, C の全零の符号語 $\mathbf{x} = (0, \dots, 0)$ を送信したとする. 受信ベクトルが $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ であるとき, 誤りが検出される確率 P が $\{1 - (1 - 2p)^n\}/2$ であることは数学的帰納法により以下のように示される.

$n = 1$ のとき, $P(y_1 = 1) = p$ であり, これは 2 元対称通信路の反転確率であるから正しい.

次に, $P(y_1 + \dots + y_n = 1) = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}$ であると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
 & P(y_1 + \dots + y_n + y_{n+1} = 1) \\
 &= P(y_1 + \dots + y_n = 1)P(\text{(A)}) + P(y_1 + \dots + y_n = 0)P(\text{(B)}) \\
 &= \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} (\text{(C)}) + \text{(D)} \\
 &= \frac{1 - (1 - 2p)^{n+1}}{2}
 \end{aligned}$$

より示される. 空欄 (A) ~ (D) を埋めなさい.

- (2) C の生成行列 $\mathbf{G}$ とパリティ検査行列 $\mathbf{H}$ を示しなさい. 各行列の行数と列数を明記すること.

問題 3. 消失確率 e の 2 元消失通信路で, $e = 0.5$ のときの 1 記号あたり何 bit が受信側に届くか, 理由とともに答えなさい.