量子物理学

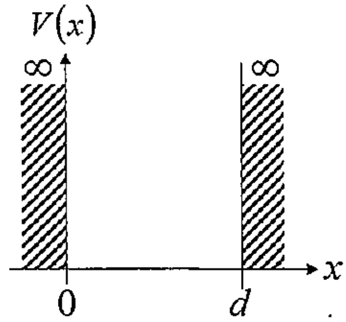
下記の問1)～11)について解答せよ．解答は，結果だけでなく導出の過程も記すこと．解答に必要な記号は各自で定義して用いてよい．

1) ポテンシャル$V(x)$中の電子に対する<u>時間に依存しない</u>一次元シュレーディンガー方程式を，ポテンシャル$V(x)$，ディラック定数$\hbar$（$=h/2\pi$，hはプランク定数），電子の質量m，波動関数$\varphi(x)$，電子の位置座標x，電子のエネルギーEを含む式で書きなさい（結果だけでよい）．

右図に示すような無限大の障壁を持つ幅dの一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<d \\ \infty, & x\leq 0,\quad x\geq d\end{cases} \quad \text{------- (1)}$$

を考える．



2) 問 1)で書いたシュレーディンガー方程式を式(1)で与えられるポテンシャルのもとで解き，エネルギー固有値E_n，および規格化された波動関数$\varphi_n(x)$を求めなさい．ただし、量子数nが1（$n=1$）のときに基底状態を表すものとする．また，波動関数の次元（単位）を書きなさい．ただし，長さの単位はメートル$[\mathrm{m}]$とする．

3) 問 2)で求めた波動関数のうち，基底状態（$n=1$）と第一励起状態（$n=2$）の波動関数を，横軸を位置座標x，縦軸を波動関数$\varphi_n(x)$とするグラフに示しなさい．

4) ポテンシャル$V(x)$中の電子に対する<u>時間に依存する</u>一次元シュレーディンガー方程式を，ポテンシャル$V(x)$，ディラック定数$\hbar$，電子の質量m，電子の位置座標x，時間を表す変数t，時間に依存する波動関数$\Psi(x,t)$を含む式で書きなさい（結果だけでよい）．

5) 問 4)で答えた時間に依存するシュレーディンガー方程式において，ポテンシャル$V(x)$が式(1)で与えられる場合を考える．初期時刻$t=0$における電子の波動関数$\Psi(x,t=0)$が問 2)で得られた波動関数$\varphi_n(x)$であった場合（すなわち$\Psi(x,t=0)=\varphi_n(x)$であった場合），$t>0$の任意の時刻における電子の状態を表す波動関数が$\Psi(x,t)=\varphi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$と書けることを，問 4)で答えた時間に依存するシュレーディンガー方程式に基づいて示しなさい．

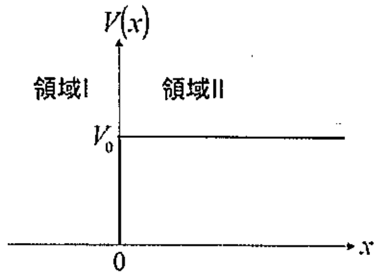
（2枚目に続く）

6) 次に，初期時刻 $t=0$ における電子の波動関数 $\Psi(x,t=0)$ が，問 2) で得られた基底状態の波動関数 $\varphi_1(x)$ と第一励起状態の波動関数 $\varphi_2(x)$ の重ね合わせ $\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)/\sqrt{2}$ であったとする．このとき，$t>0$ の任意の時刻における電子の状態を表す波動関数は $\Psi(x,t)=\left(\varphi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+\varphi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right)/\sqrt{2}$ と書ける．このことを，この $\Psi(x,t)$ を問 4) で答えた時間に依存するシュレーディンガー方程式に代入する事によって示しなさい．

7) 問 6) で考えた状態 $\Psi(x,t)=\left(\varphi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+\varphi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right)/\sqrt{2}$ での，ある位置座標 x と時刻 $t\ (>0)$ における電子の存在確率密度を求めなさい．さらに，その存在確率密度が時間とともに振動する位置座標での振動の周期 T を，井戸幅 d を含む式の形で求めなさい．

次に，問 1) で答えた時間に依存しないシュレーディンガー方程式において，ポテンシャル $V(x)$ が次の式(2)で与えられている場合を考える．

$$V(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\ (\text{領域 I})\\ V_0, & x>0\ (\text{領域 II})\end{cases} \quad \text{-------} \quad (2)$$



ただし，$V_0>0$ であるとし，また，電子のエネルギー E は $E>V_0$ を満たすとする．このポテンシャル $V(x)$ の概略を右図に示す．

8) 電子を領域 I から領域 II に向けて入射する場合を考える．各領域 I，II における電子の波動関数が，A, B, C を定数としてそれぞれ $\varphi_{\mathrm{I}}(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$，$\varphi_{\mathrm{II}}(x)=Ce^{ik'x}$ と書ける事を，必要に応じて式と文章を用いて説明しなさい．ただし，$k=\sqrt{2mE}/\hbar$，$k'=\sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$ である．

9) $x=0$ において波動関数 $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ と $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ との間に要求される境界条件を書きなさい．また，その境界条件を $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ と $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ に課すことにより，係数 A, B, C の間で成り立つ関係式を求めなさい．

10) 問 9) の結果を用いることで，領域 I から入射された電子が領域 II に透過する確率（透過率），及び領域 I に反射される確率（反射率）を求めなさい．ただし，透過率と反射率の和が 1 になる事を仮定せずに求めること．

11) 問 10) で得られた透過率と反射率の式を用い，それらの和が 1 になる事を示しなさい．