

平成27年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：電気電子工学専攻)

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

2. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2 + z + 1}$ を考える.

(1) 関数 $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(2) 複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ. ここで, C は原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 2 の円である.

3. 関数 $f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$, $-\infty < x < \infty$ を考える.

(1) 関数 $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき, 各係数 a_0, a_k, b_k の値を計算せよ.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}$ の値を計算せよ.

4. $A(t)$ を周期 2π の関数 $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & \cos t \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ とし, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $-\infty < t < \infty$

に関するつぎの線形微分方程式系を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (*)$$

(1) (*) の解 $x(t)$ を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて, $\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = I$ を満たす 2×2 の行列 $X(t)$ を求めよ. ここで, I は 2×2 の単位行列である.

(3) (2) の $X(t)$ に対して, $X(t+2\pi) = X(t)B$, $-\infty < t < \infty$ を満たす 2×2 の定数行列 B を求めよ.