量子物理学

下記の問 1) ～10) について解答しなさい。解答は、結果だけでなく導出の過程も記すこと。

必要なら以下の積分公式を用いて良い。(ただし $a > 0$ としている)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2}dx = \frac{15}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^7}}.$$

問題. バネ定数 k のバネに質量 m の質点がつけられた一次元調和振動子を考える。振動中心を原点 $x = 0$ とすると、この質点は次のポテンシャル中を運動するものと考える事ができる。

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ --------- (1)

1) このポテンシャル $V(x)$ の概略図を、横軸を x、縦軸を $V(x)$ とするグラフに図示しなさい。

2) まず、このポテンシャル $V(x)$ 中における質点の従うニュートンの運動方程式を書き、それを質点の初期座標を x_0、初期速度を 0 として解く事で、任意の時刻 $t \geq 0$ における質点の座標 $x(t)$ を表す式を求めなさい。また、振動の角振動数 ω を m と k を用いて表しなさい。

3) 問 2) で得られた角振動数をふまえ、式 (1) のポテンシャル中の質点に対する時間に依存しないシュレディンガー方程式を、角振動数 ω、プランク定数 $2\pi\hbar$、質点の質量 m、位置座標 x、波動関数 $\phi(x)$、エネルギー E などを用いて書きなさい (結果のみで良い)。

4) 問 3) で得られたシュレディンガー方程式を解いて、基底状態のエネルギー準位 $E = E_0$ を求めたい。以下の指示に従って答えを導きなさい。まず、基底状態の波動関数が

$\phi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2}$ --------- (2)

という形に書けると仮定し (ここで α は未知の定数, A_0 は規格化定数)、これを問 3) で得られたシュレディンガー方程式に代入する事により、α を m と ω を用いて表す式、及び、E_0 を α を用いて表す式を導出しなさい。そしてそれらの結果から、基底状態のエネルギー準位 E_0 を表す式を求めなさい。また、得られたエネルギー準位 E_0 を、問 1) で描いたポテンシャルの図中に水平な線として図示しなさい。

5) 問 4) で現れた規格化定数 A_0 を以下の指示に従って求めなさい。まず A_0 を α などを用いて表す式を導出し、次に、問 4) で求めた α を表す式を用いる事によって答えを導きなさい。更に、基底状態の波動関数の概略図を、問 1) で描いたポテンシャルの図中に図示しなさい。

(2 枚目に続く)

6) 次に、同じポテンシャル$V(x)$中の質点の第一励起状態のエネルギー準位 E_1 を求めたい。第一励起状態の波動関数は

$$\phi_1(x) = A_0 b\, x e^{-\alpha x^2} = b\, x \phi_0(x) \text{--------} (3)$$

という形に書く事が出来る。ここでα は問 4) で得られた定数、A_0は問 5) で得られた基底状態の波動関数の規格化定数、b は$\phi_1(x)$を規格化するために必要な未知の定数である。式 (3) を問 3) で得られたシュレディンガー方程式に代入する事により、第一励起状態のエネルギー準位E_1を求めなさい。また、得られたエネルギー準位E_1を、問 1) で描いたポテンシャルの図中に水平な線として図示しなさい。

7) $\phi_1(x)$に対する規格化条件から、式 (3) の定数b を求めなさい。更に、第一励起状態の波動関数の概略図を、問 1) で描いたポテンシャルの図中に図示しなさい。

8) 基底状態及び第一励起状態における質点の位置の期待値$\langle x\rangle$及び位置の二乗の期待値$\langle x^2\rangle$を求め、それらの結果を用いて、それぞれの状態における質点の位置の分散$\left\langle \left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle$を求めなさい。更に、基底状態と第一励起状態における質点の位置の分散の大小関係を比較し、なぜそのような大小関係になるのかを、波動関数の形をふまえて定性的に説明しなさい。

次に，ポテンシャルの形が

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \lambda x^4 \text{---------} \quad (4)$$

となっている場合を考える。ただし λ は任意の正の定数とする。

9) 式 (4) のポテンシャルの第二項目$V_2(x) = \lambda x^4$ の概略図を、問 1)で描いたポテンシャルの図中に追加して図示しなさい。

10) 式 (4) のポテンシャルの第二項目を摂動ポテンシャル$V_2(x) = \lambda x^4$として取り扱い、一次の摂動論を適用する。すなわち、問 4)、6) で求めた非摂動状態でのエネルギー準位E_n （$n=0$、1）が、摂動ポテンシャル$V_2(x)$ が付け加わった事によって$E_n + \Delta E_n$ に変化したとすると、このエネルギー準位の変化ΔE_nは、一次の摂動論を用いると、

$$\Delta E_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) V_2(x) \phi_n(x)\, dx \text{---------} (5)$$

で与えられる。この式 (5) を用いて基底状態及び第一励起状態におけるΔE_nを求め、これらの大小関係を比較しなさい。更に、なぜそのような大小関係になるのかを、摂動ポテンシャルの形及びそれぞれの波動関数の形をふまえて定性的に説明しなさい。