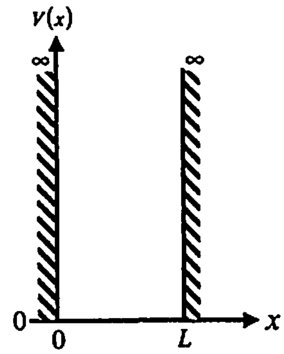
量子物理学

下記の問 1)～11) について解答せよ．解答は，結果だけでなく導出の過程も記すこと．解答に必要な記号は各自で定義して用いてよい．

質量 m の電子が右図に示すような無限大の障壁を持つ一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x \le 0, \quad x \ge L \end{cases} \quad \text{-------} \quad (1)$$

に閉じ込められているとする．



1) ポテンシャル $V(x)$ 中の電子に対する時間に依存しない一次元シュレディンガー方程式を，ポテンシャル $V(x)$，ディラック定数 $\hbar$ (= $h/2\pi$，h はプランク定数)，電子の質量 m，波動関数 $\varphi(x)$，電子の位置座標 x，電子のエネルギー E を用いて書きなさい（結果だけで良い）．

2) 問 1) で書いたシュレディンガー方程式を式 (1) で与えられるポテンシャル分布のもとで解き，エネルギー固有値 E_n を求めなさい．ただし、量子数 n が1（$n=1$）のときに基底状態を表すものとする．

3) 問 2) のエネルギー固有値 E_n に対する波動関数 $\varphi_n(x)$ が，規格化定数まで含めて，$\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ になる事を示しなさい．また，波動関数の次元（単位）を書きなさい．ただし，長さの単位はメートル [m] とする． 更に，ここで行った「波動関数の規格化」がなぜ必要であるかについて，文章で説明しなさい．

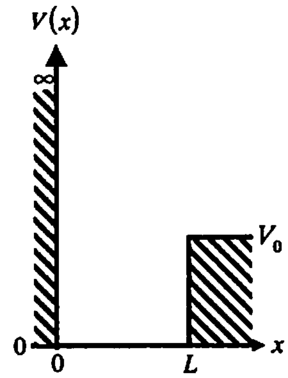
4) 問 3) で求めた波動関数のうち，基底状態（$n=1$）と第一励起状態（$n=2$）の波動関数を，横軸を位置座標 x，縦軸を波動関数 $\varphi_n(x)$ とするグラフに示しなさい．

5) 問 3) で求めた波動関数 $\varphi_n(x)$ を用いて，電子の位置の期待値 $\langle x \rangle$，位置の二乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$，運動量の期待値 $\langle p \rangle$，運動量の二乗の期待値 $\langle p^2 \rangle$ を求めなさい．

6) 電子の位置の標準偏差 $\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ が，$\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ と表される事を示しなさい．次に，問 5) の結果を用いて，位置の標準偏差と運動量の標準偏差を求めなさい．更に，任意の量子数 n に対して，位置の標準偏差と運動量の標準偏差の積が，ハイゼンベルグの不確定性原理の示す最小値 $\hbar/2$ よりも大きいことを示しなさい．

（２枚目に続く）

次に，質量 m の電子が右図のようなポテンシャル



$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x \le 0 \quad (\text{領域 I}) \\ 0, & 0 < x < L \quad (\text{領域 II}) \\ V_0, & x \ge L \quad (\text{領域 III})\end{cases} \quad \text{-------} \ (2)$$

中にある場合を考える（$V_0 > 0$とする）．ただし，電子は束縛状態（電子のエネルギー E が $E < V_0$）にあるとする．

7) 各領域I，II，IIIにおける電子の波動関数が，それぞれ $\varphi_{\mathrm{I}}(x)=0$，$\varphi_{\mathrm{II}}(x)=A\sin kx$，$\varphi_{\mathrm{III}}(x)=Be^{-\kappa x}$ と書ける事を，必要に応じて式と文章を用いて示しなさい．ただし，$k=\sqrt{2mE}/\hbar$，$\kappa=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$ であり，A，B は $x=L$ における境界条件および規格化条件によって決まる係数である（係数 A，B を求める必要はない）．

8) k^2 と κ^2 の和がエネルギー E に依存しない事を示しなさい．

9) $x=L$ において波動関数 $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ と $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ の間に要求される境界条件を書きなさい．また，その境界条件を問 7) の問題文の波動関数に課すことにより，k と κ が満たす関係式を求めなさい．

10) 問 8) と 9) の結果を用いることで，領域IIIにおけるポテンシャルの高さが $V_0=l^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$（ただし $l=1,2,3,\cdots$）で与えられる場合に，束縛状態のエネルギー固有値が何個存在するか答えなさい．

11) 束縛状態として基底状態と第一励起状態のみが存在すると仮定する．それらの波動関数の概略を，横軸を位置座標 x，縦軸を波動関数 $\varphi(x)$ とするグラフに図示しなさい．ただし，k，κ，A，B の具体的な値に基づいた作図を行う必要はなく，波動関数の概略のみで良い．