

平成29年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：電気電子工学専攻)

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

- (1) $z = z(x, y)$ は C^2 級とする. $x = t^2 - s^2$, $y = 2ts$ とするとき, z は t と s の 2 変数関数とみなせるが, そのとき, つぎの等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{4(t^2 + s^2)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right), \quad (t, s) \neq (0, 0)$$

- (2) x, y, z を実数とする. つぎの等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

2. $R > 1$ を実数とし, 始点を $-R$, 終点を R とする複素平面の実軸上の線分を ℓ , 始点を R とし, 中心 0 , 半径 R の円周上を Ri を経由して終点 $-R$ に至る曲線を Γ とする. $C = \ell \cup \Gamma$ とおく.

- (1) 複素積分 $\int_C \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$ の値を求めよ.

- (2) $R \rightarrow \infty$ のとき, $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} \rightarrow 0$ となることを示せ.

- (3) (1), (2) の結果をもとに, 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ の値を求めよ.

3. 関数 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\cos \frac{x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ を考える. $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関

数を, 記号を変えずに $f(x)$ で表す.

- (1) $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき, 各係数 a_0, a_k, b_k の値を求めよ.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- (2) (1) の結果とパーセバルの等式を利用して, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2 - 1)^2}$ の値を求めよ.

4. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = \sqrt{2} \quad (*)$$

を考える.

- (1) (*) の解 $x(t), y(t)$ を求めよ.

- (2) (1) で求めた解に対して, $(x(t), y(t))$ はパラメータ $t \geq 0$ が増加するにつれて, xy 平面上でどのような曲線の軌道を描くか述べよ.