平成 29 年度神戸大学大学院工学研究科博士課程前期課程入学試験

量子物理学

下記の問 1)～11)について解答せよ．解答は，結果だけでなく導出の過程も記す事．

問題．　電子が図 1 に示すような無限大の一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le L\\ \infty & x<0,\quad x>L\end{cases}\qquad \text{-------}\ (1)$$

に閉じ込められているとする．

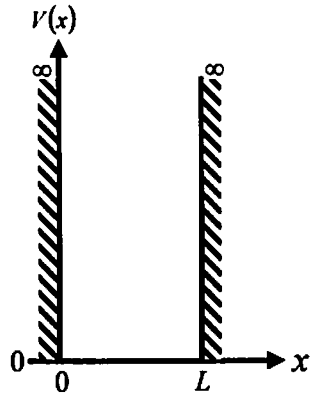

図 1

1) ポテンシャル$V(x)$中の電子に対する時間に依存しない一次元シュレーディンガー方程式を，ポテンシャル$V(x)$，ディラック定数$\hbar$（$=h/2\pi$，hはプランク定数)，電子の質量m，波動関数$\varphi(x)$，電子の位置座標x，電子のエネルギーEなどを用いて書きなさい（結果だけで良い)．

2) プランク定数の単位を書きなさい．ただし，ジュール[J]，キログラム[kg]，メートル[m]，秒[s]のどれを用いても良い．また，その根拠となる考えを文章で書きなさい．

3). 問 1)で書いたシュレーディンガー方程式に，式(1)で与えられるポテンシャル形状を適用し，エネルギー固有値（エネルギー準位）E_nを求めなさい．ただし，量子数nが1（$n=1$）のときに基底状態を表すものとする．

4) 問 3)で得られたエネルギー固有値E_nに属する波動関数$\varphi_n(x)$が，規格化定数を含めて，$\varphi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$になる事を示しなさい．また，波動関数の規格化がなぜ必要であるか文章で答えなさい．更に，異なるエネルギー固有値E_nに属する波動関数$\varphi_n(x)$が互いに直交する事を示しなさい．

次に，電子が　$\psi(x)=\sqrt{1-P}\,\varphi_1(x)+\sqrt{P}\,\varphi_2(x)$　------------- ------- (2)

という状態にあったとして，次の問いに答えなさい．（$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$はそれぞれ，上で述べた波動関数$\varphi_n(x)$の$n=1$，$n=2$に対するもの．Pは$0\le P\le 1$を満たす任意の実数とする.）

5) この波動関数$\psi(x)$が規格化されている事を示しなさい．

（２枚目に続く）

6) 電子がこの状態$\psi(x)$にある時に電子のエネルギーを測定したとすると，n番目のエネルギー準位E_nが測定される確率は$P_n = \left|\int_0^L \varphi_n^*(x)\psi(x)dx\right|^2$によって与えられる．これを用いて，$n=1$，$n=2$それぞれのエネルギー準位が測定される確率$P_1$，$P_2$を求めなさい．更に，横軸を式(2)の$P$，縦軸を$P_1$及び$P_2$とするグラフの概略を図示しなさい．

7) この状態$\psi(x)$におけるエネルギーの期待値$\langle E\rangle$，および位置の期待値$\langle x\rangle$を求めなさい．更に，横軸を式(2)のP，縦軸をエネルギーの期待値$\langle E\rangle$，および位置の期待値$\langle x\rangle$とするグラフの概略をそれぞれ図示しなさい．

次に，式(1)で与えられていた無限大井戸型ポテンシャル$V(x)$に加え，次の矩形型の摂動ポテンシャル$V'(x)$が存在しているとする．

$$V'(x) = \begin{cases} V_0 & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & x < x_1, x > x_2 \end{cases} \quad \text{------- (3)}$$

ここで$V_0 > 0$，矩形型ポテンシャルの幅は$\delta \equiv x_2 - x_1$とする．この時，電子が実際に感じるポテンシャル$V(x) + V'(x)$の概形は図２のようになっている．これをふまえて次の問いに答えなさい．

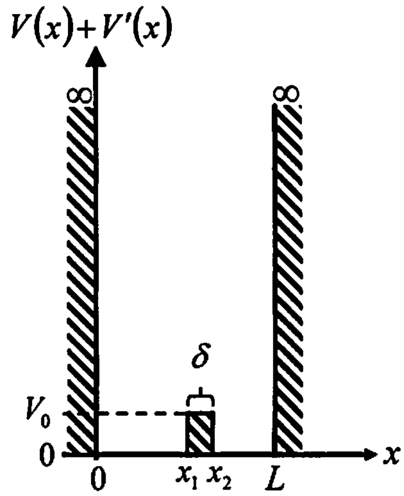

図２

8) 問 3)で求めた無限大井戸型ポテンシャル$V(x)$ 中の電子のエネルギー準位E_nが，今，$V'(x)$ が付け加わった事によって$E_n + \Delta E_n$ に変化したとする．このエネルギー準位の変化ΔE_nは，一次の摂動論を用いると，$\Delta E_n = \int_0^L \varphi_n^*(x)V'(x)\varphi_n(x)dx$によって得られる．これを用いて$\Delta E_n$を求めなさい．

9) 問 8)で得られたエネルギー準位の変化ΔE_n が，ポテンシャルV_0が付け加えられた幅δが井戸幅Lに等しい場合（$\delta = L$）にどうなるか答えなさい．

10) 問 8)で得られたエネルギー準位の変化ΔE_n を，ポテンシャルV_0が付け加えられた幅δが井戸幅Lに比べて十分小さいとしてδに関してマクローリン展開し，δに関する一次の項までで近似した式を求めなさい．

11) 問 10)の結果をふまえ，横軸をx_1，縦軸をΔE_nとするグラフの概略を$n=1$と$n=2$の場合に対して図示しなさい．ただし，図においては幅δが有限である事は考慮しなくて良い．更に，$n=1$と$n=2$それぞれの場合について，x_1がどこにある場合にΔE_nが最も大きくなるかを答え，また，なぜx_1がその位置にある場合にΔE_nが最も大きくなるかについての物理的説明を文章で書きなさい．

以上．