平成31年度
神戸大学大学院工学研究科　博士課程前期課程　入学試験問題
（数学：電気電子工学専攻）

注意事項

(1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください．例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください．解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません．

(2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい．ただし、表と上下を逆にしてください．

(3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません．

1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 集合 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\}$ に対して，2重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dxdy$ の値を求めよ．

(2) α を0でない実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\alpha\\\alpha&0&0\end{pmatrix}$ に対して，A^n の固有値を全て求めよ．ただし n は自然数とする．

2. x,y を実数とし，実数値関数 $u(x,y)=x^3-3xy^2+x$ を考える．

(1) コーシー・リーマンの関係式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ および $v(0,0)=0$ を満たす実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(2) 複素変数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を考える．$f(z)$ を z のみを用いて表わせ．

(3) 複素平面上の点 i を中心とし，半径 $\sqrt{2}$ の反時計方向に向き付けられた円周を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f(z)}\,dz$ の値を求めよ．

3. n を自然数とし, 関数 $f_n(x)=\begin{cases}n, & |x|\leq\frac{1}{n},\\ 0, & |x|>\frac{1}{n}\end{cases}$ を考える.

(1) $f_n(x)$ のフーリエ変換 $\displaystyle\hat{f}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)e^{-itx}\,dx$, $-\infty<t<\infty$ を求めよ.

(2) 任意に固定された $t\neq 0$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(t)$ を求めよ. また, 任意に固定された自然数 n に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\hat{f}_n(t)$ を求めよ.

(3) (1) の結果を利用して, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{t}{n}}{t}\,dt$ の値を求めよ.

4. $\boldsymbol{y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}$, $x\geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A\boldsymbol{y}+e^x\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

を考える．ここで $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^2$ は定ベクトルとする．

(1) 行列の指数関数 e^{xA} を求めよ．ここで $e^{xA}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k$, $A^0=I$ (単位行列) とする．

(2) $\boldsymbol{z}(x)=e^{-x}\boldsymbol{y}(x)$ とおいて，$\boldsymbol{z}(x)$ に関する微分方程式系を導け．

(3) $(*)$ の解 $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}(\pi)=e^{\pi}\boldsymbol{z}(\pi)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を満たすように，定ベクトル $\boldsymbol{c}$ を決めよ．