量子物理学

下記の問について解答せよ。なお、Dirac 定数は ħ とし、その他に解答する上で変数等が必要であれば、各自でその都度定義すること。

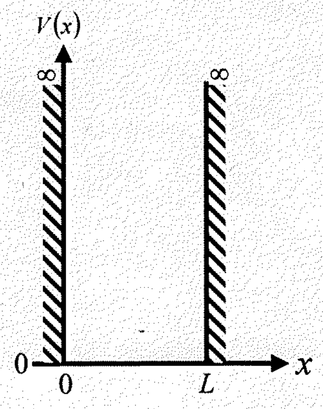

図 1

問題 1 質量 m の電子が右図に示すような無限大の障壁を持つ一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<L \\ \infty, & x\leq 0.\quad x\geq L\end{cases} \qquad (1)$$

に閉じ込められているとする。(ページ下部に積分公式を示す)

1) 電子のエネルギーを E、波動関数を$\phi(x)$として、定常状態におけるシュレディンガー方程式を書きなさい。

2) 1)のシュレディンガー方程式を解くにあたり、波動関数$\phi(x)$が満たすべき境界条件を書きなさい。

3) 電子の波数を k として、1)で書いたシュレディンガー方程式の $0<x<L$ の領域における一般解を書きなさい。なお、係数は各自で定義すること。

4) 3)の一般解を 1)のシュレディンガー方程式に代入して、$0<x<L$ における k をエネルギーの関数として導きなさい。

5) 2)の境界条件を用いて、エネルギー固有値を求めなさい。その際、エネルギーについては、E を E_n とすること(n は正の整数)。

6) 5)の固有値に対応するように$\phi(x)$のあらわな形を書きなさい。

7) ここで、6)の結果を用いて、この井戸型ポテンシャル内の電子の位置と運動量(p)の期待値を求めなさい。

8) 7)の結果を踏まえて、位置と運動量のゆらぎΔx とΔp を求めなさい。

9) 7)と 8)の解答を用いて、不確定性原理について説明しなさい。

積分公式 (C は積分定数である):

$$\int \sin^2(Ax)\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2Ax)}{4A}+C \qquad \int x\sin^2(Ax)\,dx=\frac{x^2}{4}-\frac{\cos(2Ax)}{8A^2}-\frac{x\sin(2Ax)}{4A}+C$$

$$\int x^2\sin^2(Ax)\,dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x\cos(2Ax)}{4A^2}-\frac{(2A^2x^2-1)\sin(2Ax)}{8A^3}+C$$

問題2 一次元空間を運動する質量 m の電子が右図に示すような高さが $V(x)$

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0.\quad x>L \\ V\ \ (>0), & 0\le x\le L\end{cases} \qquad (2)$$

である障壁ポテンシャルに左から衝突するとする。ただし、時間依存性は考えないとする。

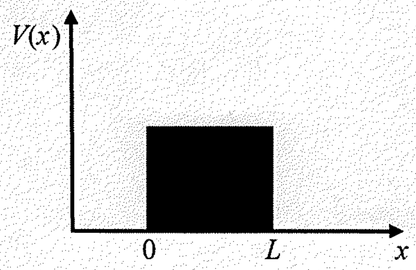

図 2

1) $x<0$ の領域における電子の波数を k_1 として、その領域の波動関数 $\phi_1(x)$ を書きなさい。係数は適宜、各自で定義すること。

2) $0\le x\le L$ の領域の電子の波数を k_2、$x>L$ の領域の電子の波数を k_3 として、同様にそれぞれの領域の波動関数 $\phi_2(x)$ と $\phi_3(x)$ を書きなさい。

3) 1)と 2)で考えた 3 つの領域におけるシュレディンガー方程式を書きなさい。ただし、電子のエネルギーは E とする。

4) ここで、$E<V$ であるとする。この場合に電子の波数が虚数となる領域はどこか。その理由とともに説明しなさい。

5) $x=0$ の点で波動関数が満たすべき境界条件を書きなさい。

6) $x=L$ の点で波動関数が満たすべき境界条件を書きなさい。

7) この電子の障壁に対する透過率 T と反射率 R を求めなさい。なお、4)で考えた領域の波数は虚数であることから ik' とする(k' は実数)。